

Formulaire d'aide à la résolution des problèmes de calcul topométrique



Session 2017

Sommaire

1	Triangle quelconque	p. 3
2	Triangles semblables	p. 3
3	Triangle rectangle	p. 4
4	Trapèze	p. 4
5	Polygone de n côtés	p. 4
6	Raccordements circulaires	p. 5
7	Secteur circulaire	p. 5
8	Transformations de coordonnées	p. 6
9	Intersection de deux droites	p. 6
10	Intersection de deux cercles	p. 7
11	Intersection droite - cercle	p. 7
12	Nivellement indirect	p. 8
13	Corrections des distances	p. 8-9
14	Correction de niveau apparent	p. 9
15	Moyenne arithmétique, moyenne pondérée	p. 9
16	Le GO (ou VO)	p. 10
17	Relèvement sur 3 points - <i>méthode du barycentre</i> -	p. 11
18	Relèvement sur 3 points - <i>méthode de Delambre</i> -	p. 11
19	Changement de base	p. 12
20	Tolérances : Classes de précision	p. 13-14

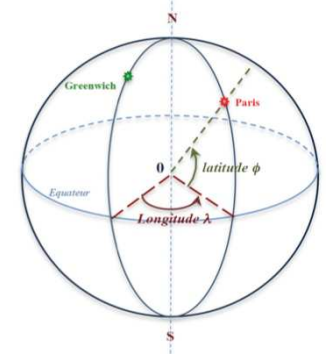
Conventions relatives aux travaux topographiques

Unités en vigueur :

- distance en mètre (m)
- angle en grades (gon)

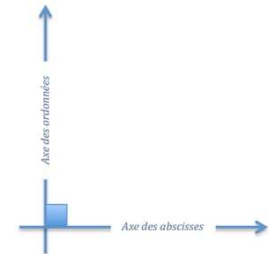
Systèmes de coordonnées géographiques

- longitude : λ
- latitude : Φ
- hauteur sur l'ellipsoïde : h

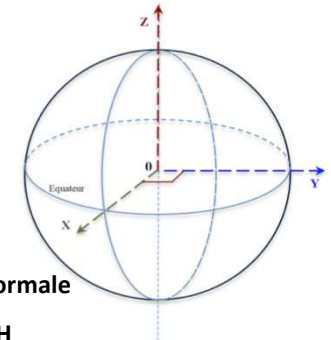


Systèmes de coordonnées planimétriques

- Coordonnées locales : x, y
- Coordonnées Lambert 93 : e, n
- Coordonnées RGF 93 CC (9 zones) : E, N



Systèmes de coordonnées géocentriques X, Y, Z



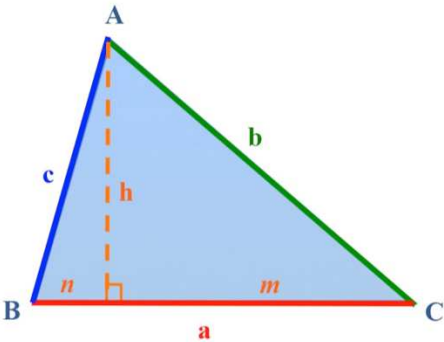
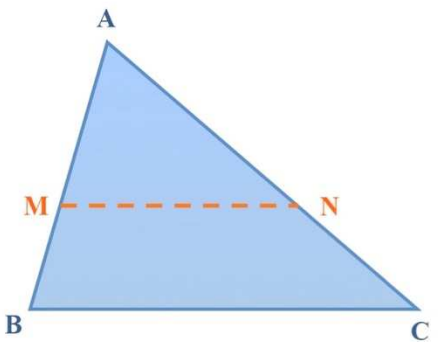
Systèmes de coordonnées altimétriques : altitude normale

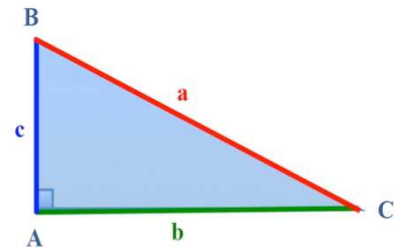
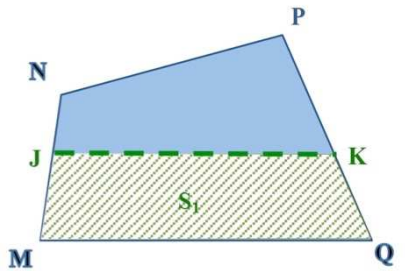
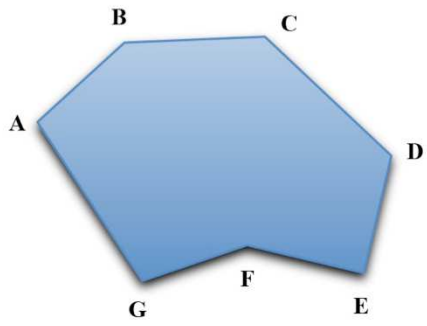
- NGF-IGN 69 (NGF-IGN78 pour la Corse) : H

Rayon moyen de la terre : $R_m = 6378$ km environ

Terminologie usitée :

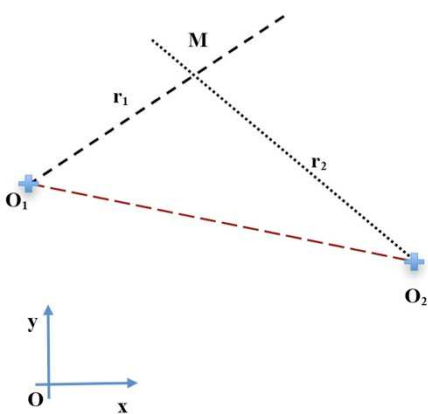
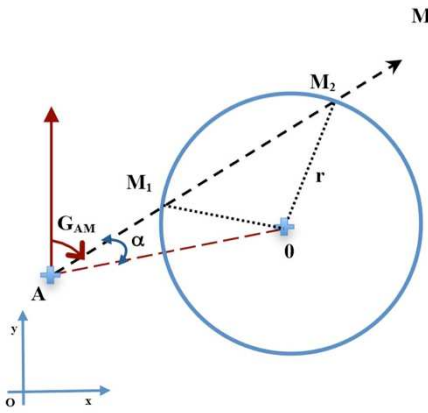
- ht ou hi = hauteur des tourillons ou hauteur de l'appareil
- hp = hauteur de prisme ou h_v (voyant) ou h_r (réflecteur)

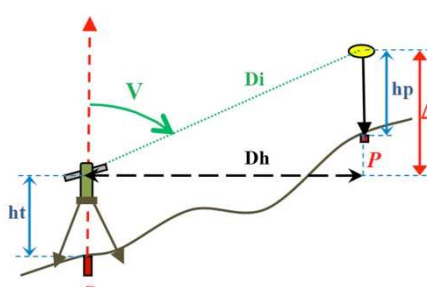
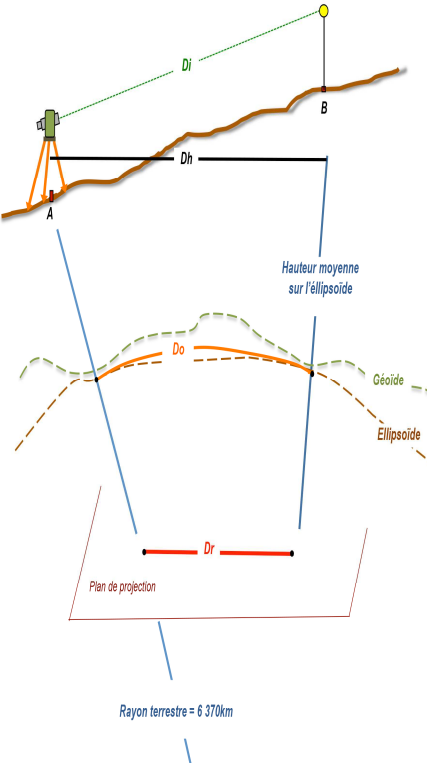
croquis - schémas	formules
<p>1-Triangle quelconque</p> 	<p>Relation des sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$</p> <p>Relation des cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$</p> <p>Superficie $S = (a \cdot b \cdot \sin C) / 2$ $S = (a \cdot c \cdot \sin B) / 2$ $S = (b \cdot c \cdot \sin A) / 2$</p> $S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot \sin A}$ <p>avec $p = \frac{1}{2}$ périmètre $S = \sqrt{[p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)]}$</p> $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\left[\frac{(p - b) \cdot (p - c)}{p \cdot (p - a)} \right]}$ $n = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)}{2a}$ $h^2 = c^2 - n^2 = b^2 - m^2$
<p>2-Triangles semblables</p> 	<p>Théorème de Thalès</p> $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$ $S_{AMN} = S_{ABC} \cdot k^2$

croquis - schémas	formules
<p>3-Triangle rectangle</p> 	<p>$\sin B = \text{côté opposé} / \text{hypoténuse} = b/a$ $\cos B = \text{côté adjacent} / \text{hypoténuse} = c/a$ $\tan B = \text{côté opposé} / \text{côté adjacent} = b/c$</p> $BA^2 + AC^2 = BC^2$ <p>Superficie $S = \frac{1}{2} \cdot (b \cdot c)$</p>
<p>4-Trapèze</p> 	<p>$S_1 = \text{superficie MJKQ}$</p> $JK^2 = MQ^2 - 2S_1 \cdot \left(\frac{1}{\tan Q} + \frac{1}{\tan M} \right)$ $QK = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin Q}$ $JM = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin M}$
<p>5-Polygone de n cotés</p> 	<p>Somme des angles intérieurs $\Sigma = (n - 2) \cdot 200$</p> <p>Somme des angles extérieurs $\Sigma = (n + 2) \cdot 200$</p> <p>Superficie</p> $2S = \sum_{i=n}^{i=1} [x_i \cdot (y_{(i+1)} - y_{(i-1)})]$ $2S = \sum_{i=n}^{i=1} [y_i \cdot (x_{(i+1)} - x_{(i-1)})]$

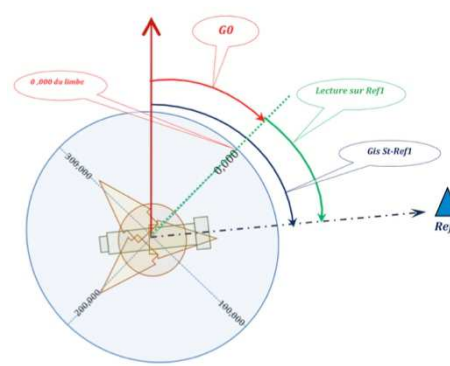
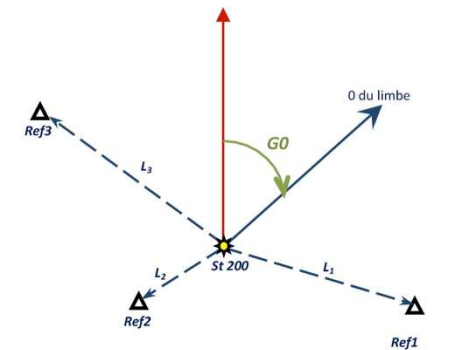
croquis - schémas	formules
6-Raccordements circulaires	
	<p>Périmètre du cercle = $2 \cdot \pi \cdot r$</p> <p>Superficie du disque = $\pi \cdot r^2$</p> <p>Longueur de la corde $T_1T_2 = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\beta}{2}$</p> <p>Longueur de l'arc $T_1T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \beta}{400}$</p> <p>Longueur de la flèche $MH = r - [r \cdot \cos \frac{\beta}{2}]$</p> <p>Longueur du segment de la tangente</p> <p>$ST_1 = ST_2 = r \cdot \tan \frac{\beta}{2}$</p>
7-Secteur circulaire : superficies	
	<p>Triangle: $S = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \beta$</p> <p>Secteur: $S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \beta}{400}$</p> <p>Segment: $S_{\text{secteur}} - S_{\text{triangle}}$</p>

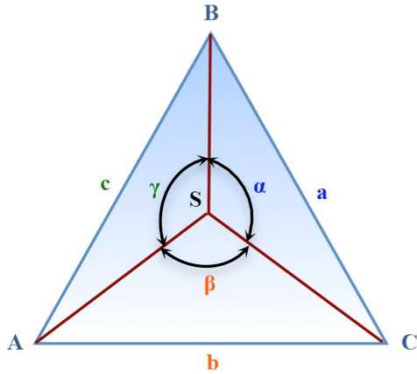
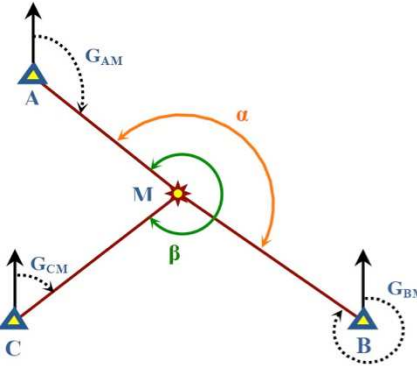
croquis - schémas	formules
-Transformations de coordonnées	
	<p>$x_B - x_A = D_{AB} \cdot \sin G_{AB}$</p> <p>$y_B - y_A = D_{AB} \cdot \cos G_{AB}$</p> <p>$D_{AB} = \sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]}$</p> <p>Gisement AB</p> <p>$\tan G' = (x_B - x_A) / (y_B - y_A)$</p> <p>$\tan G' = \frac{\Delta x}{\Delta y}$</p> <p>on obtient G' avec son signe</p> <p>si $\Delta x \geq 0$ et $\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G'$</p> <p>si $\Delta x \geq 0$ et $\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200$</p> <p>si $\Delta x \leq 0$ et $\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200$</p> <p>si $\Delta x \leq 0$ et $\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 400$</p>
9-Intersection de deux droites	
	<p>1ère méthode :</p> <p>G_{AB} et D_{AB} par (x, y)</p> <p>résolution du triangle AMB</p> <p>angle A = $G_{AB} - G_{AM}$</p> <p>angle B = $G_{BM} - G_{BA}$</p> <p>D_{AM} et D_{BM}</p> <p>Calcul des (x, y) de M depuis A</p> <p>Contrôle : (x, y) de M depuis B</p> <p>2ème méthode : (formule de Delambre)</p> <p>depuis A</p> $y_M - y_A = \frac{(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}}{\tan G_{BM} - \tan G_{AM}}$ <p>depuis B</p> $x_M - x_A = (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}$ <p>Contrôle : idem depuis B</p>

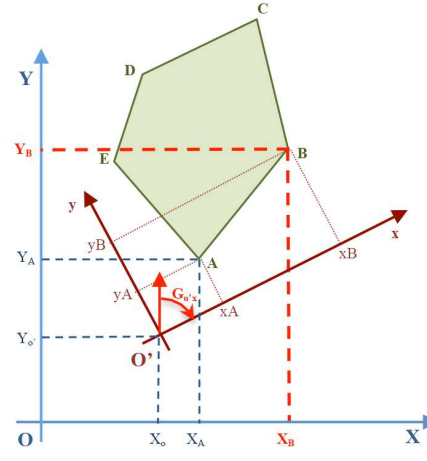
croquis - schémas	formules
<p>10-Intersection de deux cercles</p> 	<p>calcul de $G_{O_1-O_2}$ et $D_{O_1-O_2}$ par (x,y)</p> <p>résolution du triangle O_1O_2M</p> <p>calcul de G_{O_1-M} puis x_M et y_M par rapport à O_1</p> <p>Contrôle :</p> <p>calcul de G_{O_2-M} puis calcul de x_M et y_M par rapport à O_2</p>
<p>11-Intersection droite – cercle</p> 	<p>G_{AO} et D_{AO} par (x,y)</p> <p>résolution du triangle AOM_1</p> <p>$OM_1 = r = \text{rayon}$ Calcul de l'angle A, de l'angle M_1, de l'angle O Distance AM_1</p> <p>Calcul des (x,y) de M_1 depuis A</p> <p>Contrôle : Calcul des (x,y) de M_1 depuis O</p> <p>idem pour le triangle AOM_2</p>

croquis - schémas	formules
<p>12-Nivellement indirect</p> 	<p>$Dh = \sqrt{Di^2 - \Delta hi^2}$</p> <p>Dénivelée instrumentale Δhi</p> <p>$\Delta hi = Di \cdot \cos V$</p> <p>$\Delta hi = Dh / \tan V$</p> <p>$Dh = Di \cdot \sin V$</p> <p>$H_p = H_s + ht + \Delta hi - h_p$</p>
<p>13- Corrections des distances</p> 	<p>Pour obtenir une distance, il conviendra d'apporter aux mesures de longueurs les corrections suivantes :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- constante de prisme (donnée constructeur) 2- correction atmosphérique - C_a - obtenue par lecture sur un abaque (saisie sur le terrain au moment des mesures) 3- réduction à l'horizontale $Dh = Di \cdot \sin V$ 4- correction de réduction à l'ellipsoïde - C_o - ou $C_{\text{ellipsoïde}}$ $C_o = -\frac{Dh \cdot h}{R + h}$ 5- correction de représentation plane ou de projection - C_r ou C_l - cette correction varie en fonction de la situation géographique du chantier, elle est obtenue avec « CIRCE ».

formules	
<p>Transformer une Dh en Dr (distance réduite à la projection)</p> <p>Coefficients de réduction et module</p> <p>- Coefficient de réduction à l'ellipsoïde:</p> $k_{\text{ellipsoïde}} = -1000 \cdot \frac{hm}{(Rm + hm)}$ <p>- Coefficient d'altération linéaire :</p> <p>kr lu à l'aide du logiciel CIRCE</p> <p><i>hm</i> = hauteur moyenne au dessus de l'ellipsoïde <i>Rm</i> = rayon moyen de la terre avec, <i>Rm</i> et <i>hm</i> en m, et <i>k_{ellipsoïde}</i> et <i>kr</i> en m/km</p>	<p>Module m (avec 6 décimales)</p> $m = 1 + \frac{k_{\text{ellipsoïde}} + kr}{1000}$ <p>Distance réduite à la projection</p> $Dr = Dh \cdot m$ <p><i>Dr</i> et <i>Dh</i> en mètre</p>
<p>14- Correction de niveau apparent</p> <p>Pour des portées supérieures à 300m, il est nécessaire de prendre en compte deux erreurs systématiques :</p> <p>- l'erreur due à la sphéricité de la terrestre</p> <p>- l'erreur due à la réfraction atmosphérique.</p> <p>Ces erreurs de sphéricité et de réfraction sont généralement associées en une seule erreur nommée erreur de niveau apparent.</p> <p>La correction globale est appelée correction de niveau apparent Cna.</p> <p>Cette correction est à ajouter à la dénivelée.</p> <p>expression simplifiée : Cna = $\frac{Dh^2}{15,2}$</p> <p>Avec <i>Cna</i> en mètre, et <i>Dh</i> en km</p>	<p>15- Calcul d'une moyenne de plusieurs valeurs</p> <p>Moyenne arithmétique :</p> $\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\text{valeur 1} + \text{valeur 2} + \dots + \text{valeur } n}{n}$ <p>avec : <i>n</i> = nombre de valeurs prises en compte</p> <p>Moyenne pondérée :</p> $\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\sum Vi \cdot pi}{\sum pi}$ <p>avec : <i>V</i> = valeur (longueur, angle, etc.) <i>pi</i> = poids attribué à la valeur <i>i</i></p>

croquis - schémas	formules
<p>16- le G0 (ou V0):</p>  	<p>Le G0 (ou V0) d'une station est le gisement du zéro du limbe de l'appareil : gisement de la droite passant par le centre du limbe et la graduation « zéro » de ce limbe.</p> $G0_{\text{station}} = G_{\text{is St-Ref1}} - \text{lecture sur Ref1}$ <p>Le Go moyen</p> <p>Pour obtenir une précision satisfaisante de l'orientation de la station (et la contrôler!) plusieurs références connues en coordonnées sont visées. Il faut alors calculer un G0 moyen à partir des différents G0 obtenus.</p> <p>Deux méthodes sont alors possibles:</p> <p>a - Go moyen par moyenne arithmétique : si les visées sont sensiblement d'égales longueurs.</p> $G0_{\text{moyen St}} = \frac{\sum G0_{\text{St-Ref } i}}{n}$ <p>avec <i>n</i> = nb de visées</p> <p>b - Go moyen par moyenne pondérée : si les visées sont d'inégales longueurs</p> <p>La pondération est alors proportionnelle à la longueur de chaque visée.</p> <p>Remarque: plus une visée est longue plus son orientation angulaire est précise.</p> $G0_{\text{moyen St}} = \frac{\sum (G0_{\text{St-}i} \cdot Li)}{\sum Li}$ <p>avec :</p> <p>G0_{St-i} = différents G0 calculés depuis la station Li = longueur de chaque visée</p>
<p>Moyenne arithmétique :</p> $Go_{St200} = \frac{G0_{\text{St200-Ref1}} + G0_{\text{St200-Ref2}} + G0_{\text{St200-Ref3}}}{3}$ <p>Moyenne pondérée :</p> $Go_{\text{moyen St200}} = \frac{(G0_{\text{St-Ref1}} \cdot L1) + (G0_{\text{St-Ref2}} \cdot L2) + (G0_{\text{St-Ref3}} \cdot L3)}{L1 + L2 + L3}$	

croquis - schémas	formules
<p>17-Relèvement sur 3 points: <i>méthode du barycentre</i></p> 	<p>S est inconnu et stationné</p> <p>A, B et C sont trois points connus</p> <p>$\alpha + \beta + \gamma = 400 \text{ gon}$ et $A + B + C = 200 \text{ gon}$</p> $ma = \frac{1}{(\cotan A - \cotan \alpha)}$ $mb = \frac{1}{(\cotan B - \cotan \beta)}$ $mc = \frac{1}{(\cotan C - \cotan \gamma)}$ $x_S = \frac{ma \cdot x_A + mb \cdot x_B + mc \cdot x_C}{ma + mb + mc}$ $y_S = \frac{ma \cdot y_A + mb \cdot y_B + mc \cdot y_C}{ma + mb + mc}$
<p>18-Relèvement sur 3 points: <i>méthode de Delambre</i></p> 	<p>M est inconnu et stationné</p> <p>A, B et C sont trois points connus</p> $\tan G_{AM} = \frac{\left[\frac{(x_A - x_B)}{\tan \alpha} - \frac{(x_A - x_C)}{\tan \beta} + (y_B - y_C) \right]}{\left[\frac{(y_A - y_B)}{\tan \alpha} - \frac{(y_A - y_C)}{\tan \beta} - (x_B - x_C) \right]}$ <p>$G_{BM} = G_{AM} + \alpha$</p> $y_M = y_A + \frac{[(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}]}{(\tan G_{BM} - \tan G_{AM})}$ $x_M = x_A + (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}$

croquis - schémas	formules
<p>19- Changement de base : <i>passer d'un système initial à un système final</i></p>  <p>- sur le schéma, XOY représente un système orthonormé plan-</p>	<p>Eléments connus :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Les coordonnées x et y des points A et B sont connues dans le système initial. - Les coordonnées X et Y des points o' et A sont connues dans le système final. <p>- Avec le gisement de l'axe O'x connu dans le système général : GO'x = GAB - gAB + 100</p> <p>Eléments cherchés :</p> <p>$XB = XA + \Delta x \cdot \sin Go'x - \Delta y \cdot \cos Go'x$</p> <p>$YB = YA + \Delta x \cdot \cos Go'x + \Delta y \cdot \sin Go'x$</p> <p>Soit pour un cas général</p> <p>$X_n = X(n-1) + \Delta x \cdot \sin Go'x - \Delta y \cdot \cos Go'x$</p> <p>$Y_n = Y(n-1) + \Delta x \cdot \cos Go'x + \Delta y \cdot \sin Go'x$</p> <p>avec $\Delta x = x_n - x(n-1)$ et $\Delta y = y_n - y(n-1)$</p> <p>Avec sur le schéma :</p> <p>$xO'y = \text{système initial}$</p> <p>$XOY = \text{système final}$</p> <p>$x_A$ et $y_A = \text{coordonnées dans le système initial}$</p> <p>$X_A$ et $Y_A = \text{coordonnées dans le système final}$</p> <p>$GAB = \text{gisement dans le système final}$</p> <p>$gAB = \text{gisement dans le système initial}$</p> <p>- Avec le gisement de l'axe O'y connu dans le système final:</p> <p>GO'y = GAB - gAB</p> <p>$X_n = X(n-1) + \Delta x \cdot \cos Go'y + \Delta y \cdot \sin Go'y$</p> <p>$Y_n = Y(n-1) + \Delta y \cdot \cos Go'y - \Delta x \cdot \sin Go'y$</p>

20- Les Tolérances : Classes de précision (modèle standard)

arrêté 2003, modifié 2006

Pour tout échantillon comportant N objets géographiques, on calcule l'écart moyen en position $E_{moy\ pos}$

Celui-ci est défini par la moyenne arithmétique des écarts en position E_{pos} relevés sur les points des objets géographiques.

On dit que la population dont est issu l'échantillon comportant N éléments est de classe de précision $[xx]$ cm lorsque simultanément les **trois conditions a, b, et c** sont remplies :

a/ l'écart moyen en position de l'échantillon est inférieur à T

$$E_{moy\ pos} \leq T \quad \text{avec} \quad T = [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times c^2}\right) \text{ cm}$$

C = coefficient de sécurité des mesures de contrôle donnée par le cahier des charges (usuellement $C=2$)

b/ le nombre N' d'écarts dépassant le premier seuil $T_1 = k \times [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times c^2}\right)$

n'exède pas l'entier immédiatement supérieur à $0,01 \times N + 0,232 \times \sqrt{N}$

avec la valeur de k indiquée dans la **Table 1** en fonction du nombre n de coordonnées caractérisant la position des objets géographiques.

Table 1 : valeurs du coefficient k en fonction du nombre n de coordonnées caractérisant la position des objets géographiques considérés et suivant la même loi statistique.

n	1	2	3
k	3.23	2.42	2.11

c/ aucun écart en position E_{pos} dans l'échantillon n'exède le second seuil

$$T_2 = 1.5 \times k \times [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times c^2}\right) \text{ cm}$$

ou $T_2 = 1,5 \times T_1 \text{ cm}$

Lorsque $N < 5$, aucun écart supérieur à T_2 n'est admis (voir Table 2)

Table 2 : Nombre d'écarts acceptés

N (nombre d'éléments de l'échantillon)	1	5	14	45	86	133	185	241	299	360	423
	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à
	4	13	44	85	132	184	240	298	359	422	487
N'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Selon les catégories de plans planimétriques et altimétriques, il est possible d'indiquer de façon approximative, les **classes de précision** suivantes relatives aux levés de détail et aux vérifications des plans :

Échelle du plan	Nature du plan	Catégorie planimétrique	Classe de précision (cm)
Toutes échelles	numérique	P1	2
1/200	régulier	P2	4
1/500	régulier	P3	10
1/1000	régulier	P4	20
1/2000	régulier	P5	40
1/5000	régulier	P6	100
Toutes échelles	expédié	P7	> 100

Catégorie altimétrique	Classe de précision (cm)
A1	1
A2	2
A3	4
A4	10
A5	20
A6	> 20